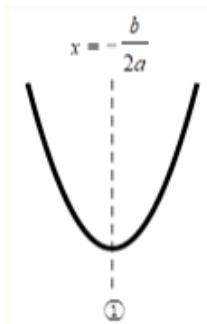
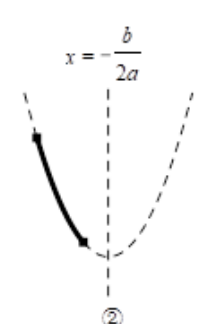
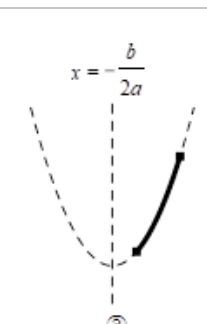
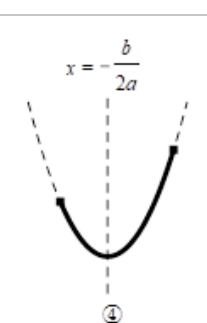


第3讲二次函数与区间最值

对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c(a > 0)$ ($y_{\max}$ 表示 y 的最大值, $y_{\min}$ 表示 y 的最小值)

图象	自变量取值范围	最小值	最大值
	全体实数	当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 取到最值.	无
	$m \leq x \leq n < -\frac{b}{2a}$	当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = y_{\min}$	当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = y_{\max}$
	$-\frac{b}{2a} < m \leq x \leq n$	当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = y_{\min}$	当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = y_{\max}$
	$m \leq x \leq n$	当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = y_{\min}$	当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = y_{\max}$

 教法备注

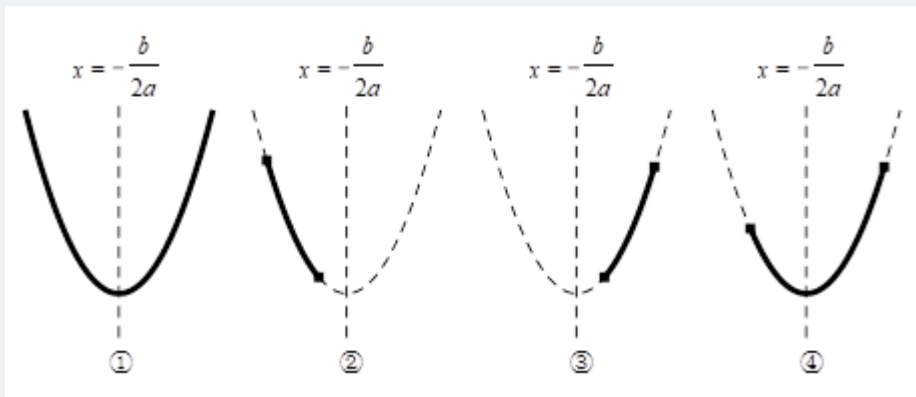
对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ ($y_{\max}$ 表示 y 的最大值, $y_{\min}$ 表示 y 的最小值)

(1) 若自变量 x 的取值范围为全体实数, 如图①, 函数在顶点处 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, 取到最值.

(2) 若 $m \leq x \leq n < -\frac{b}{2a}$, 如图②, 当 $x = m$, $y = y_{\max}$; 当 $x = n$, $y = y_{\min}$.

(3) 若 $-\frac{b}{2a} < m \leq x \leq n$, 如图③, 当 $x = m$, $y = y_{\min}$; 当 $x = n$, $y = y_{\max}$.

(4) 若 $m \leq x \leq n$, 且 $m \leq -\frac{b}{2a} \leq n$, $n + \frac{b}{2a} > -\frac{b}{2a} - m$, 如图④, 当 $x = -\frac{b}{2a}$, $y = y_{\min}$; 当 $x = n$, $y = y_{\max}$.



一、定轴定区间

1. 求二次函数区间内最值

典题精练1

1. 求函数 $y = 2x^2 - x + 1$ 在给定区间内的最大值和最小值.

(1) 若 $1 \leq x \leq 2$, 求 $y = 2x^2 - x + 1$ 的最大值、最小值.

(2) 若 $0 \leq x \leq 1$, 求 $y = 2x^2 - x + 1$ 的最大值、最小值.

(3) 若 $-2 \leq x \leq 0$, 求 $y = 2x^2 - x + 1$ 的最大值、最小值.

【答案】 (1) 最大值为7, 最小值为2; (2) 最小值为 $\frac{7}{8}$, 最大值为2; (3) 最大值为11, 最小值为1

【解析】 (1) 由图像可知: 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 函数 $y = 2x^2 - x + 1$ 单调递增,

当 $x = 1$ 时, y 最小, 且 $y = 2 \times 1 - 1 + 1 = 2$,

当 $x = 2$ 时, y 最大, 且 $y = 2 \times 2^2 - 2 + 1 = 7$.

(2) 由图像可知: 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 函数 $y = 2x^2 - x + 1$ 是先减后增,

$\therefore$ 当 $x = \frac{1}{4}$, y 最小, 且 $y = \frac{7}{8}$.

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $y = 2 \times 0 - 0 + 1 = 1$, 当 $x = 1$ 时, $y = 2 \times 1 - 1 + 1 = 2 > 1$,

∴当 $x = 1$ 时, y 最大, 且 $y = 2$.

(3) 由函数图像开口向上, 且 $-2 \leq x \leq 0 < \frac{1}{4}$, 故当 $x = -2$ 时, y 取最大值为11, 当 $x = 0$ 时, y 取最小值为1.

【标注】【题型】二次函数给定范围求最值

典题精练2

2. 已知点 $A(t, 1)$ 为函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b 为常数, 且 $a \neq 0$) 与 $y = x$ 图象的交点.

(1) 求 t .

(2) 若函数 $y = ax^2 + bx + 4$ 的图象与 x 轴只有一个交点, 求 a, b .

(3) 若 $1 \leq a \leq 2$, 设当 $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ 时, 函数 $y = ax^2 + bx + 4$ 的最大值为 m , 最小值为 n , 求 $m - n$ 的最小值.

【答案】 (1) $t = 1$.

$$(2) \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = 9 \\ b = -12 \end{cases}.$$

$$(3) \frac{9}{8}.$$

【解析】 (1) 把 $A(t, 1)$ 代入 $y = x$ 得 $t = 1$.

(2) ∵ $y = ax^2 + bx + 4$ 的图象与 x 轴只有一个交点,

$$\begin{aligned} \therefore \begin{cases} a + b + 4 = 1 \\ \Delta = b^2 - 16a = 0 \end{cases} \\ \therefore \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = 9 \\ b = -12 \end{cases}. \end{aligned}$$

(3) 把 $A(1, 1)$ 代入 $y = ax^2 + bx + 4$ 得, $b = -3 - a$,

$$\begin{aligned} \therefore y &= ax^2 - (a + 3)x + 4 \\ &= a \left(x - \frac{a + 3}{2a} \right)^2 - \frac{a}{4} - \frac{9}{4a} + \frac{5}{2}, \\ \therefore \text{对称轴为直线 } x &= \frac{a + 3}{2a}, \end{aligned}$$

$$\therefore 1 \leq a \leq 2,$$

$$\therefore \frac{5}{4} \leq \frac{a + 3}{2a} \leq 2,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq x \leq 2,$$

$$\therefore \text{当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时, } y = ax^2 + bx + 4 \text{ 的最大值为 } m = -\frac{a}{4} + \frac{5}{2},$$

$$\text{当 } x = \frac{a + 3}{2a} \text{ 时, } n = -\frac{a}{4} - \frac{9}{4a} + \frac{5}{2},$$

$$\therefore m - n = \frac{9}{4a},$$

$$\therefore 1 \leq a \leq 2,$$

$\therefore$ 当 $a = 2$ 时, $m - n$ 的值最小,

即 $m - n$ 的最小值 $\frac{9}{8}$.

【标注】【知识点】一次函数与一元一次方程

【知识点】二次函数与坐标轴交点

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 A 在抛物线 $y = x^2 + bx + c (b > 0)$ 上, 且 $A(1, -1)$.
- (1) 若 $b - c = 4$, 求 b, c 的值.
- (2) 若该抛物线与 y 轴交于点 B , 其对称轴与 x 轴交于点 C , 试求出 OB, OC 的数量关系.
- (3) 将该抛物线平移, 平移后的抛物线仍经过 $(1, -1)$, 点 A 的对应点 $A_1(1 - m, 2b - 1)$, 当 $m \geq -\frac{3}{2}$ 时, 求平移后抛物线的顶点所能达到的最高点的坐标.

【答案】 (1) $b = 1, c = -3$.

(2) $OB = 2 + 2OC$.

(3) $\left(\frac{3}{4}, -\frac{17}{16}\right)$.

【解析】 (1) 把 $(1, -1)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$,

可得 $b + c = -2$,

$$\text{解} \begin{cases} b + c = -2 \\ b - c = 4 \end{cases},$$

可得 $b = 1, c = -3$.

(2) 由 $b + c = -2$, 得 $c = -2 - b$,

对于 $y = x^2 + bx + c$,

当 $x = 0$ 时, $y = c = -2 - b$,

抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2}$,

所以 $B(0, -2 - b), C\left(-\frac{b}{2}, 0\right)$,

因为 $b > 0$,

所以 $OC = \frac{b}{2}, OB = 2 + b$,

所以 $OB = 2 + 2OC$.

(3) 由平移前的抛物线 $y = x^2 + bx + c$,

可得 $y = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$,

即 $y = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - 2 - b$,

因为平移后 $A(1, -1)$ 的对应点为 $A_1(1 - m, 2b - 1)$,

可知, 抛物线向左平移 m 个单位长度,

向上平移 $2b$ 个单位长度,

则平移后的抛物线解析式为 $y = \left(x + \frac{b}{2} + m\right)^2 - \frac{b^2}{4} - b + 2b$,

即 $y = \left(x + \frac{b}{2} + m\right)^2 - \frac{b^2}{4} - 2 + b$,

把 $(1, -1)$ 代入,

得 $\left(1 + \frac{b}{2} + m\right)^2 - \frac{b^2}{4} - 2 + b = -1$,

$\left(1 + \frac{b}{2} + m\right)^2 = \frac{b^2}{4} - b + 1$,

$\left(1 + \frac{b}{2} + m\right)^2 = \left(\frac{b}{2} - 1\right)^2$,

所以 $1 + \frac{b}{2} + m = \pm\left(\frac{b}{2} - 1\right)$,

当 $1 + \frac{b}{2} + m = \frac{b}{2} - 1$ 时, $m = -2$ (不合题意, 舍去);

当 $1 + \frac{b}{2} + m = -\left(\frac{b}{2} - 1\right)$ 时, $m = -b$,

因为 $m \geq -\frac{3}{2}$, 所以 $b \leq \frac{3}{2}$,

所以 $0 < b \leq \frac{3}{2}$,

所以平移后的抛物线解析式为 $y = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - 2 + b$,

即顶点为 $\left(\frac{b}{2}, -\frac{b^2}{4} - 2 + b\right)$,

设 $p = -\frac{b^2}{4} - 2 + b$, 即 $p = -\frac{1}{4}(b - 2)^2 - 1$,

因为 $-\frac{1}{4} < 0$, 所以当 $b < 2$ 时, p 随 b 的增大而增大,

因为 $0 < b \leq \frac{3}{2}$,

所以当 $b = \frac{3}{2}$ 时, p 取最大值为 $-\frac{17}{16}$,

此时, 平移后抛物线的顶点所能达到的最高点坐标为 $\left(\frac{3}{4}, -\frac{17}{16}\right)$.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】二次函数与坐标轴交点

【知识点】二次函数平移变换

【知识点】点在二次函数图象上

经典再现

4. 已知抛物线 $y = x^2 + bx - 3$ (b 是常数) 经过点 $A(-1, 0)$.

(1) 求该抛物线的解析式和顶点坐标.

(2) $P(m, t)$ 为抛物线上的一个动点, P 关于原点的对称点为 P' .

① 点 P' 落在该抛物线上时, 求 m 的值.

② 当点 P' 落在第二象限内, $P'A^2$ 取得最小值时, 求 m 的值.

【答案】 (1) 解析式为 $y = x^2 - 2x - 3$, 顶点坐标为 $(1, -4)$.

(2) ① $m_1 = \sqrt{3}$, $m_2 = -\sqrt{3}$.

$$\textcircled{2} \quad m_1 = \frac{2 + \sqrt{14}}{2}.$$

【解析】 (1) $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx - 3$ 经过点 $A(-1, 0)$,

$$\therefore 0 = 1 - b - 3, \text{ 解得 } b = -2,$$

$$\therefore \text{ 抛物线的解析式为 } y = x^2 - 2x - 3,$$

$$\therefore y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4,$$

$$\therefore \text{ 顶点坐标为 } (1, -4).$$

(2) ① 由点 $P(m, t)$ 在抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 上, 有 $t = m^2 - 2m - 3$,

又点 P' 和 P 关于原点对称, 有 $P'(-m, -t)$,

$\therefore$ 点 P' 落在抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 上,

$$\therefore -t = (-m)^2 - 2(-m) - 3, \text{ 即 } t = -m^2 - 2m + 3,$$

$$\therefore m^2 - 2m - 3 = -m^2 - 2m + 3,$$

$$\text{解得 } m_1 = \sqrt{3}, m_2 = -\sqrt{3}.$$

② 由题意知, $P'(-m, -t)$ 在第二象限,

$$\therefore -m < 0, -t > 0, \text{ 即 } m > 0, t < 0,$$

又抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 的顶点坐标是 $(1, -4)$, 得 $-4 \leq t < 0$,

过点 P' 作 $P'H \perp x$ 轴, H 为垂足, 有 $H(-m, 0)$,

$$\text{又 } A(-1, 0), t = m^2 - 2m - 3,$$

$$\text{则 } P'H^2 = t^2, AH^2 = (-m + 1)^2 = m^2 - 2m + 1 = t + 4,$$

当点 A 和 H 不重合时, 在 $\text{Rt}\triangle P'AH$ 中, $P'A^2 = P'H^2 + AH^2$,

当点 A 和 H 重合时, $AH = 0$, $P'A^2 = P'H^2$, 符合上式,

$$\therefore P'A^2 = P'H^2 + AH^2, \text{ 即 } P'A^2 = t^2 + t + 4 (-4 \leq t < 0),$$

$$\text{记 } y' = t^2 + t + 4, \text{ 则 } y' = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4},$$

$\therefore$ 当 $t = -\frac{1}{2}$ 时, y' 取得最小值,

$$\text{把 } t = -\frac{1}{2} \text{ 代入 } t = m^2 - 2m - 3, \text{ 得 } -\frac{1}{2} = m^2 - 2m - 3,$$

$$\text{解得 } m_1 = \frac{2 - \sqrt{14}}{2}, m_2 = \frac{2 + \sqrt{14}}{2},$$

$$\text{由 } m > 0, \text{ 可知 } m = \frac{2 - \sqrt{14}}{2} \text{ 不符合题意,}$$

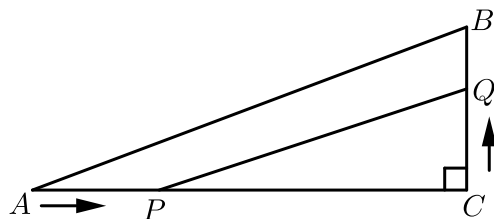
$$\therefore m_1 = \frac{2 + \sqrt{14}}{2}.$$

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

2. 动点产生的函数最值

典题精练

5. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6\text{cm}$, $BC = 2\text{cm}$, 点 P 在边 AC 上, 从点 A 向点 C 移动, 点 Q 在边 CB 上, 从点 C 向点 B 移动. 若点 P, Q 均以 1cm/s 的速度同时出发, 且当一点移动到终点时, 另一点也随之停止, 连接 PQ , 则线段 PQ 的最小值是 ().



- A. 20cm B. 18cm C. $2\sqrt{5}\text{cm}$ D. $3\sqrt{2}\text{cm}$

【答案】C

【解析】 $\because AP = CQ = t$,

$$\therefore CP = 6 - t,$$

$$\therefore PQ = \sqrt{PC^2 + CQ^2} = \sqrt{(6-t)^2 + t^2} = \sqrt{2(t-3)^2 + 18},$$

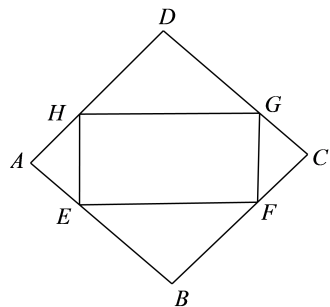
$$\because 0 \leq t \leq 2,$$

$$\therefore \text{当 } t = 2 \text{ 时, } PQ \text{ 的值最小,}$$

$$\therefore \text{线段 } PQ \text{ 的最小值是 } 2\sqrt{5}.$$

【标注】【题型】二次函数增减性

6. 如图, 点 E, F, G, H 分别在菱形 $ABCD$ 的四条边上, $BE = BF = DG = DH$, 连接 EF, FG, GH, HE , 得到四边形 $EFGH$, 若 $AB = a$, $\angle A = 60^\circ$, 当四边形 $EFGH$ 的面积取得最大时, BE 的长度为 ().



A. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$

B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$

C. $\frac{a}{2}$

D. $\frac{a}{3}$

【答案】C

【解析】 $\because DG = DH$,

$$\therefore \angle DHG = \angle DGH,$$

$$\text{同理 } \angle CGF = \frac{180^\circ - \angle D}{2},$$

$$\therefore \angle DGH + \angle CGF = \frac{360^\circ - (\angle D + \angle C)}{2},$$

又 $\because$ 菱形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle D + \angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DGH + \angle CGF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HGF = 90^\circ,$$

同理, $\angle GHE = 90^\circ$, $\angle EFG = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形,

$$\because AB = a, \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \text{菱形 } ABCD \text{ 的面积是: } \frac{\sqrt{3}}{2}a^2,$$

设 $BE = x$, 则 $AE = a - x$,

$$\text{则 } \triangle AEH \text{ 的面积是: } \frac{\sqrt{3}(a-x)^2}{4},$$

$$\triangle BEF \text{ 的面积是: } \frac{\sqrt{3}x^2}{4},$$

$$\text{则矩形 } EFGH \text{ 的面积 } y = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 - \frac{\sqrt{3}(a-x)^2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2,$$

$$\text{即 } y = -\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}ax,$$

$$\text{则当 } x = \frac{\sqrt{3}a}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{2} \text{ 时, 函数有最大值.}$$

$$\text{此时 } BE = \frac{a}{2}.$$

【标注】【知识点】菱形的性质

【知识点】菱形的周长与面积

3. 二次函数中的线段最值

典题精练

7. 已知抛物线 $y = -mx^2 + 2mx + 3m (m > 0)$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 B 在 A 的右侧), 与 y 轴交于点 C , D 是抛物线的顶点.
- (1) 当 $m = 1$ 时, 求顶点 D 的坐标.
- (2) 若 $OD = OB$, 求 m 的值.
- (3) 若 E 为 A 、 B 两点间抛物线上的一个动点 (含端点 A 、 B), 过点 E 作 $EH \perp x$ 轴, 垂足为 H , 交直线 BC 于点 F , 设线段 EF 的长为 t , 若 t 的最大值为 $\frac{9}{2}$, 求 m 的值.

【答案】(1) (1, 4).

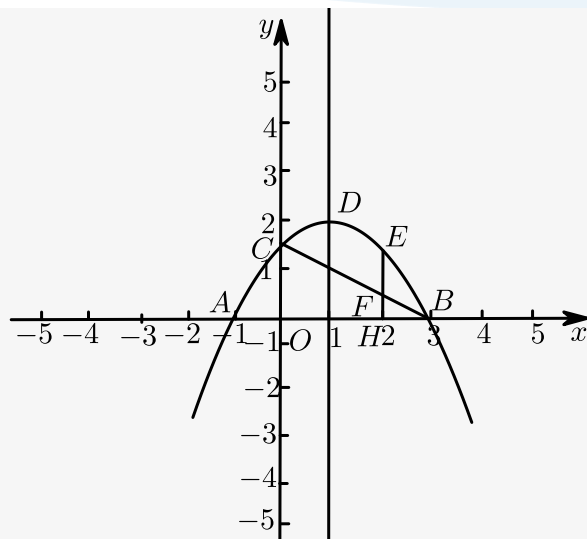
(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) $\frac{9}{8}$.

【解析】(1) $m = 1$ 时, $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x - 1)^2 + 4$,
顶点 $D(1, 4)$.

(2) $y = -mx^2 + 2mx + 3m$
 $= -m(x - 1)^2 + 4m$,
 $D(1, 4m)$,
 令 $-mx^2 + 2mx + 3m = 0$,
 得: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$,
 $\therefore A(-1, 0)$, $B(3, 0)$,
 $OB^2 = 3^2 = 9$, $OD^2 = 1^2 + 16m^2$,
 $\because OB = OD$, $\therefore OB^2 = OD^2$
 $\therefore 16m^2 + 1 = 9$, $m^2 = \frac{1}{2}$,
 $\because m > 0$,
 $\therefore m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) 由 (2) 知 $B(3, 0)$, $C(0, 3m)$,



设 BC 解析式： $y = kx + b$ 将 B, C 代入

$$\begin{cases} 3k + b = 0 \\ b = 3m \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} k = -m \\ b = 3m \end{cases},$$

$\therefore BC$ 解析式： $y = -mx + 3m$,

设 $E(a, -ma^2 + 2ma + 3m)$, $F(a, -ma + 3m)$,

①当 $0 \leq a \leq 3$ 时,

$$t = EF = -ma^2 + 2ma + 3m - (-ma + 3m)$$

$$= -ma^2 + 3ma$$

$$= -m\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}m,$$

$$a = \frac{3}{2} \text{ 时, } t_{\max} = \frac{9}{4}m,$$

②当 $-1 \leq a < 0$ 时,

$$t = EF = ma^2 - 3ma = m\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}m,$$

$$a = -1 \text{ 时, } t_{\max} = 4m,$$

$$\because m > 0,$$

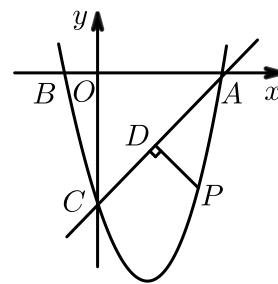
$$\therefore 4m > \frac{9}{4}m,$$

$$\therefore 4m = \frac{9}{2}, m = \frac{9}{8},$$

$$\text{综上所述, } m = \frac{9}{8}.$$

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

8. 如图, 在平面直角坐标系中, 已知点 B 的坐标为 $(-1, 0)$, 且 $OA = OC = 4OB$, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 经过 A, B, C 三点.



- (1) 求 A, C 两点的坐标 .
- (2) 求抛物线的解析式 .
- (3) 若点 P 是直线 AC 下方的抛物线上的一个动点 , 作 $PD \perp AC$ 于点 D , 当 PD 的值最大时 , 求此时点 P 的坐标及 PD 的最大值 .

【答案】 (1) A, C 两点的坐标分别为 $(4, 0), (0, -4)$.

(2) $y = x^2 - 3x - 4$.

(3) $P(2, -6)$, PD 的最大值为 $2\sqrt{2}$.

【解析】 (1) $\because B(-1, 0)$, $\therefore OB = 1$, $\therefore OA = OC = 4OB = 4$,

故 A, C 两点的坐标分别为 $(4, 0), (0, -4)$.

(2) 设抛物线的解析式为 : $y = a(x+1)(x-4) = a(x^2 - 3x - 4)$,

将 $C(0, -4)$ 代入得 : $-4a = -4$,

解得 : $a = 1$,

故抛物线的解析式为 : $y = x^2 - 3x - 4$.

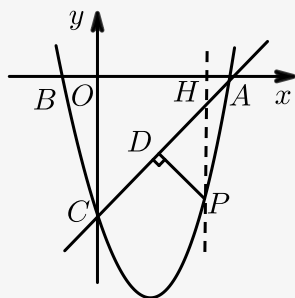
(3) $\because$ 直线 CA 过点 $C(0, -4)$,

$\therefore$ 设其函数解析式为 : $y = kx - 4$,

将 $A(4, 0)$ 代入 , 得 $4k - 4 = 0$, 解得 : $k = 1$,

故直线 CA 的解析式为 : $y = x - 4$,

过点 P 作 y 轴的平行线交 AC 于点 H ,



$\because OA = OC = 4$,

$\therefore \angle OAC = \angle OCA = 45^\circ$,

$\because PH \parallel y$ 轴 ,

$$\therefore \angle PHD = \angle OCA = 45^\circ,$$

设点 $P(x, x^2 - 3x - 4)$, 则点 $H(x, x - 4)$,

$$PD = HP \cdot \sin \angle PHD = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 4 - x^2 + 3x + 4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + 2\sqrt{2}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - 2)^2 + 2\sqrt{2}$$

.

$$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0,$$

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时, PD 取最大值, 最大值为 $2\sqrt{2}$,

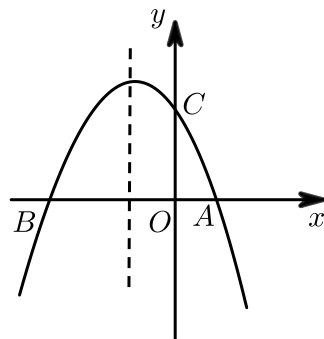
此时点 $P(2, -6)$.

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

4. 二次函数中的面积最值

典题精练

9. 如图, 抛物线 $y = -x^2 - 2x + 3$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点, 与 y 轴交于点 C .



(1) 求 A 、 B 、 C 三点的坐标.

(2) 抛物线上在第二象限内是否存在一点 Q , 使 $\triangle QBC$ 的面积最大? 若存在, 求出点 Q 的坐标及 $\triangle QBC$ 的面积最大值; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $A(1, 0)$ 、 $B(-3, 0)$ 、 $C(0, 3)$.

(2) 存在; $Q\left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$, 最大值为 $\frac{27}{8}$.

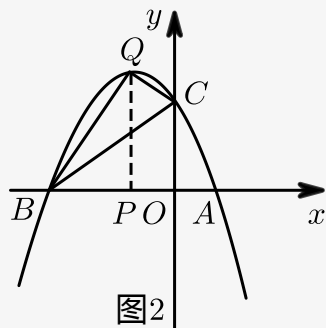
【解析】 (1) $\because$ 抛物线 $y = -x^2 - 2x + 3$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点, 与 y 轴交于点 C ,

当 $y = 0$ 时, 即 $-x^2 - 2x + 3 = 0$, 解得: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$,

当 $x = 0$ 时, $y = 3$,

$\therefore A(1, 0)$ 、 $B(-3, 0)$ 、 $C(0, 3)$.

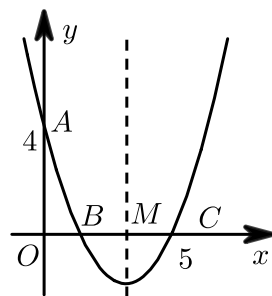
(2) 如图2, 设 $Q(m, -m^2 - 2m + 3)$, 过 Q 作 $QP \perp x$ 轴于 P ,



$$\begin{aligned}
 \therefore OP &= -m, PQ = -m^2 - 2m + 3, BP = 3 + m. \\
 \therefore S_{\triangle PBQ} &= \frac{1}{2} BP \cdot PQ = \frac{1}{2} (3 + m)(-m^2 - 2m + 3), \\
 S_{\text{四边形}QPOC} &= \frac{1}{2} (OC + PQ) \cdot OP = \frac{1}{2} (3 - m^2 - 2m + 3) \cdot (-m), \\
 S_{\triangle BOC} &= \frac{1}{2} OB \cdot OC = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}. \\
 \therefore S_{\triangle QBC} &= S_{\triangle PBQ} + S_{\text{四边形}QPOC} - S_{\triangle BOC} = -\frac{3}{2}m^2 - \frac{9}{2}m, \\
 \text{即 } S_{\triangle QBC} &= -\frac{3}{2}m^2 - \frac{9}{2}m = -\frac{3}{2}\left(m + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{8}. \\
 \therefore \text{当 } m &= -\frac{3}{2} \text{ 时, } \triangle QBC \text{ 的面积最大, 最大值为 } \frac{27}{8}. \\
 \therefore Q &\left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right).
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次函数与面积

10. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线经过点 $A(0, 4)$ ， $B(1, 0)$ ， $C(5, 0)$ ，其对称轴与 x 轴交于点 M 。



- (1) 求此抛物线的解析式 and 对称轴。
- (2) 连接 AC ，在直线 AC 下方的抛物线上，是否存在一点 N ，使 $\triangle NAC$ 的面积最大？若存在，请求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】(1) $y = \frac{4}{5}(x - 3)^2 - \frac{16}{5}$ ，抛物线的对称轴是 $x = 3$ 。

(2) 在直线 AC 下方的抛物线上存在点 N ，使 $\triangle NAC$ 面积最大， $N\left(\frac{5}{2}, -3\right)$ 。

【解析】(1) 根据已知条件可设抛物线的解析式为 $y = a(x - 1)(x - 5)$ ，

把点 $A(0, 4)$ 代入上式, 解得 $a = \frac{4}{5}$,
 $\therefore y = \frac{4}{5}(x-1)(x-5) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{24}{5}x + 4 = \frac{4}{5}(x-3)^2 - \frac{16}{5}$,
 $\therefore$ 抛物线的对称轴是 $x = 3$.

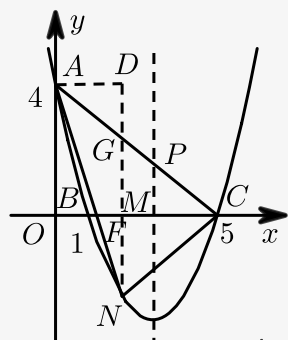
(2) 在直线 AC 下方的抛物线上存在点 N , 使 $\triangle NAC$ 面积最大.

如图, 设 N 点的横坐标为 t ,

此时点 $N(t, \frac{4}{5}t^2 - \frac{24}{5}t + 4) (0 < t < 5)$,

过点 N 作 y 轴的平行线, 分别交 x 轴、 AC 于点 F 、 G , 过点 A 作 $AD \perp NG$, 垂足为 D ,

由(2)可知直线 AC 的解析式为 $y = -\frac{4}{5}x + 4$,



把 $x = t$ 代入 $y = -\frac{4}{5}x + 4$ 得 $y = -\frac{4}{5}t + 4$,

则 $G(t, -\frac{4}{5}t + 4)$,

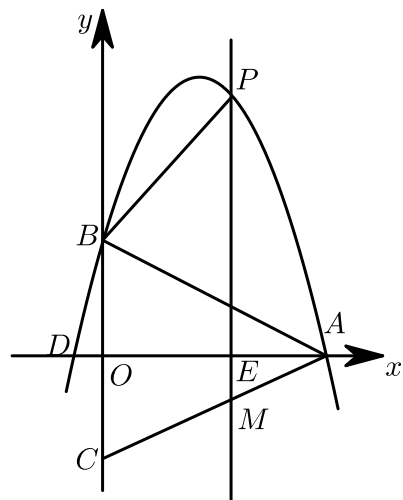
此时, $NG = -\frac{4}{5}t + 4 - (\frac{4}{5}t^2 - \frac{24}{5}t + 4) = -\frac{4}{5}t^2 + 4t$,

$\therefore AD + CF = OC = 5$,

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle ACN} &= S_{\triangle ANG} + S_{\triangle CGN} \\ &= \frac{1}{2}AD \times NG + \frac{1}{2}NG \times CF \\ &= \frac{1}{2}NG \cdot OC \\ &= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{4}{5}t^2 + 4t\right) \times 5 \\ &= -2t^2 + 10t \\ &= -2\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}, \\ \therefore \text{当 } t = \frac{5}{2} \text{ 时, } \triangle NAC \text{ 面积的最大值为 } \frac{25}{2}, \\ \text{由 } t = \frac{5}{2}, \text{ 得 } y &= \frac{4}{5}t^2 - \frac{24}{5}t + 4 = -3, \\ \therefore N\left(\frac{5}{2}, -3\right). \end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次函数与面积

11. 如图，已知直角坐标系中， A 、 B 、 D 三点的坐标分别为 $A(8,0)$ ， $B(0,4)$ ， $D(-1,0)$ ，点 C 与点 B 关于 x 轴对称，连接 AB 、 AC 。



- (1) 求过 A 、 B 、 D 三点的抛物线的解析式。
- (2) 有一动点 E 从原点 O 出发，以每秒2个单位的速度向右运动，过点 E 作 x 轴的垂线，交抛物线于点 P ，交线段 CA 于点 M ，连接 PA 、 PB ，设点 E 运动的时间为 t ($0 < t < 4$)秒，求四边形 $PBCA$ 的面积 S 与 t 的函数关系式，并求出四边形 $PBCA$ 的最大面积。

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}(x+1)(x-8) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + 4$ 。

(2) $S = -8(t-2)^2 + 64$ 。最大值为64。

【解析】 (1) $\because A(8,0)$ ， $D(-1,0)$ ，

设过 A 、 B 、 D 三点的抛物线的解析式为 $y = a(x+1)(x-8)$ ，

将 $B(0,4)$ 代入得 $-8a = 4$ ，

$$\therefore a = -\frac{1}{2}，$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -\frac{1}{2}(x+1)(x-8) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + 4。$$

(2) $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $AO \perp BC$ ，则 $OB = OC = 4$ ，

$$\therefore C(0, -4)。$$

$$\text{由 } A(8,0)，B(0,4)，\text{得：直线 } AB: y = -\frac{1}{2}x + 4。$$

依题意，知： $OE = 2t$ ，即 $E(2t, 0)$ 。

$$\therefore P(2t, -2t^2 + 7t + 4)，Q(2t, -t + 4)，$$

$$PQ = (-2t^2 + 7t + 4) - (-t + 4) = -2t^2 + 8t。$$

$$S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle PAB}$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 8 + \frac{1}{2} \times (-2t^2 + 8t) \times 8 = -8t^2 + 32t + 32$$

$$= -8(t-2)^2 + 64。$$

∴当 $t = 2$ 时， S 有最大值，且最大值为64.

【标注】【题型】题型：二次函数与相似三角形结合

二、定轴动区间

典题精练1

12. 已知抛物线 $C: y = x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点，与 y 轴交于点 C ，且关于直线 $x = 1$ 对称，点 A 的坐标为 $(-1, 0)$.

(1) 求抛物线 C 的解析式和顶点坐标.

(2) 当 $a \leq x \leq a + 1$ 时，二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的最小值为 $2a$ ，求 a 的值.

【答案】(1) $y = x^2 - 2x - 3$, $(1, -4)$.

(2) $a = 1 - \sqrt{5}$ 或 $a = 2 + \sqrt{7}$.

【解析】(1) ∵点 $A(-1, 0)$ 与点 B 关于直线 $x = 1$ 对称，

∴点 B 的坐标为 $(3, 0)$,

∴抛物线解析式为 $y = (x + 1)(x - 3)$,

∴ $y = (x + 1)(x - 3)$

$= x^2 - 2x - 3$,

∴抛物线 C 的表达式为 $y = x^2 - 2x - 3$,

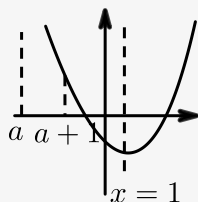
∴ $y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$,

∴顶点坐标为 $(1, -4)$.

故答案为： $y = x^2 - 2x - 3$, $(1, -4)$.

(2) $y = x^2 - 2x - 3$ 对称轴为直线 $x = 1$,

①当 $a + 1 < 1$ 即 $a < 0$ 时，如图：



当 $a \leq x \leq a + 1$ 时，

y 随 x 的增大而减小，

当 $x = a + 1$ 时， y 有最小值 $2a$ ，

$$\text{代入}(a+1)^2 - 2(a+1) - 3 = 2a,$$

$$a^2 + 2a + 1 - 2a - 2 - 3 = 2a,$$

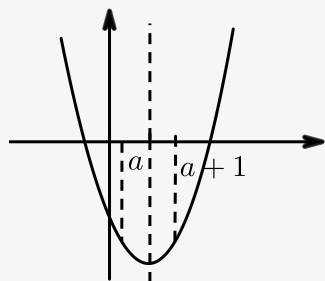
$$a^2 - 2a - 4 = 0,$$

$$a_1 = 1 + \sqrt{5}, a_2 = 1 - \sqrt{5},$$

$$\because a < 0,$$

$$\therefore a = 1 - \sqrt{5},$$

②当 $a \leq 1 \leq 1+a$ 时, 即 $0 \leq a \leq 1$ 时, 如图,



当 $x = 1$ 时, y 有最小值,

$$\text{代入} 1 - 2 - 3 = 2a,$$

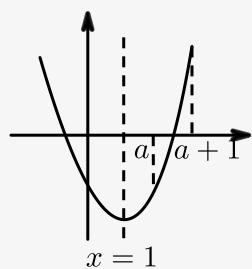
$$-4 = 2a,$$

$$a = -2,$$

$$\because 0 \leq a \leq 1,$$

$$\therefore a = -2 \text{ 舍去},$$

③当 $a > 1$ 时,



当 $a \leq x \leq a+1$, y 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x = a$ 时, y 有最小值 $2a$,

$$\text{代入} a^2 - 2a - 3 = 2a,$$

$$a^2 - 4a - 3 = 0,$$

$$a_1 = 2 + \sqrt{7}, a_2 = 2 - \sqrt{7},$$

$$\because a > 1,$$

$$\therefore a = 2 + \sqrt{7},$$

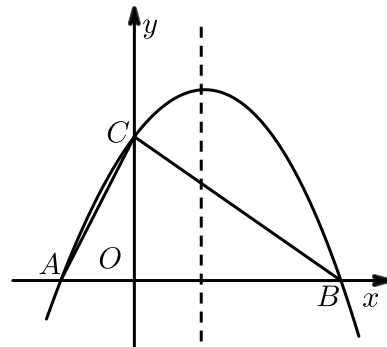
综上 $a = 1 - \sqrt{5}$ 或 $a = 2 + \sqrt{7}$.

【标注】【知识点】二次函数一般式

【知识点】二次函数图象关于原点对称

【思想】分类讨论思想

13. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a < 0)$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 、点 B ，与 y 轴交于点 C ，抛物线的对称轴是直线 $x = 1$ ，连接 BC 、 AC 。



- (1) 求 $S_{\triangle ABC}$ (用含有 a 的代数式来表示)。
(2) 若 $S_{\triangle ABC} = 6$ ，求抛物线的解析式。
(3) 在(2)的条件下，当 $-1 \leq x \leq m + 1$ 时， y 的最大值是2，求 m 的值。

【答案】(1) $-6a$ 。

(2) $y = -x^2 + 2x + 3$ 。

(3) $-\sqrt{2}$ 。

【解析】(1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a < 0)$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ ，点 B ，且对称轴为

$$x = 1,$$

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(3, 0)$,

$$\therefore AB = |-1| + |3| = 4,$$

$\because$ 点 C 为抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 y 轴的交点，点 C 在 y 轴正半轴上，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, c)$ ，

$$\therefore OC = c,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot OC = 2c,$$

把 $(-1, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ 中可得：

$$a - b + c = 0,$$

$$\because \text{抛物线的对称轴为：} x = -\frac{b}{2a} = 1,$$

$$\therefore b = -2a,$$

$$\therefore c = -3a,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = -6a.$$

$$(2) \because S_{\triangle ABC} = -6a = 6,$$

$$\therefore a = -1,$$

$$\therefore b = -2a, c = -3a,$$

$$\therefore b = 2, c = 3,$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为: } y = -x^2 + 2x + 3.$$

$$(3) \text{ 令 } y = 2, \text{ 则 } -x^2 + 2x + 3 = 2,$$

$$\therefore -x^2 + 2x + 3 = 2,$$

$$\therefore x^2 - 2x - 1 = 0,$$

$$\therefore x_1 = 1 - \sqrt{2}, x_2 = 1 + \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{当 } -1 \leq x \leq m+1 \text{ 时, } y \text{ 的最大值是 } 2,$$

$$\therefore m+1 = 1 - \sqrt{2},$$

$$\therefore m = -\sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

【知识点】二次函数与面积

【知识点】二次函数一般式

【能力】运算能力

【能力】推理论证能力

典题精练2

14. 二次函数 $y = -(x-1)^2 + 5$, 当 $m \leq x \leq n$ 且 $mn < 0$, y 的最小值为 $2m$, 最大值为 $2n$, 则 $m+n$ 的值为 ().

A. $\frac{5}{2}$

B. 2

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】由题意可知： $m < 0, n > 0$ ；由二次函数解析式可知：该二次函数的图象开口向下，对称轴为 $x = 1$ ，顶点坐标为 $(1, 5)$ 。①当 $m \leq 0 \leq x \leq n < 1$ 时，二次函数的值 y 随 x 的增大而增大，所以当 $x = m$ 时 y 取最小值，即 $2m = -(m-1)^2 + 5$ ，整理得 $m^2 - 4 = 0$ ，解得 $m = 2$ (舍去) 或 $m = -2$ ，当 $x = n$ 时， y 取得最大值，即 $2n = -(n-1)^2 + 5$ ，整理得，解得 $n = 2$ (舍去) 或 $n = -2$ (舍去)，因此该情况不符合题意。②当 $m \leq 0 \leq x \leq 1 \leq n$ 时，二次函数图象在 $(m, 1)$ 上 y 值随 x 的值的增大而增大，在 $(1, n)$ 上 y 的值随 x 的值的增大而减小，所以当 $x = 1$ 时取得最大值，即 $2n = 5$ ，则 $n = \frac{5}{2}$ ；当 $1 - m > n - 1$ ，即 $m + n < 2$ 时，在 $x = m$ 处取得最小值，即 $2m = -(m-1)^2 + 5$ ，

整理得 $m^2 - 4 = 0$ ，解得 $m = 2$ （舍去）或 $m = -2$ ，此时 $m + n = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$ 符合题意；当 $1 - m < n - 1$ ，即 $m + n > 2$ 时，在 $x = n$ 处取得最小值，即 $2m = -(n - 1)^2 + 5$ ，将 $n = \frac{5}{2}$ 代入整理得 $2m = \frac{11}{4}$ ，解得 $m = \frac{11}{8}$ ，不符合题意舍去。综上所述， $m + n$ 的值为 $\frac{1}{2}$ 。

故本题正确答案为D。

【标注】【题型】二次函数给定范围求最值

15. 已知函数 $y = x^2 + x - 1$ ，当 $m \leq x \leq m + 2$ 时， $-\frac{5}{4} \leq y \leq 1$ ，则 m 的取值范围是（ ）。
- A. $m \geq -2$ B. $-2 \leq m \leq -1$ C. $-2 \leq m \leq -\frac{1}{2}$ D. $m \leq -1$

【答案】C

【解析】∵ 函数 $y = x^2 + x - 1$ 的对称轴为直线 $x = -\frac{1}{2}$ ，
 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时， y 有最小值，
 此时 $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4}$ ，
 ∴ 函数 $y = x^2 + x - 1$ 在 $m \leq x \leq 1$ 上的最小值是 $-\frac{5}{4}$ ，
 ∴ $m \leq -\frac{1}{2}$ ，
 ∴ 当 $x = 1$ 时， $y = 1 + 1 - 1 = 1$ ，对称轴为直线 $x = -\frac{1}{2}$ ，
 ∴ 当 $x = -\frac{1}{2} - \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -2$ ， $y = 1$ ，
 ∴ 函数 $y = x^2 + x - 1$ 在 $m \leq x \leq 1$ 上的最大值是 1，
 且 $m \leq -\frac{1}{2}$ ，
 ∴ $-2 \leq m \leq -\frac{1}{2}$ 。
 故选C。

【标注】【知识点】二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的增减性

三、动轴定区间

典题精练

16. 已知函数 $y = x^2 + kx + 2$ ，当 $-2 \leq x \leq 2$ 时，此函数有最小值 -4 ，求实数 k 的值。

【答案】 k 的值为 ± 5 .

【解析】对称轴为 $x = -\frac{k}{2}$,

当 $-\frac{k}{2} \leq -2$, 即 $k \geq 4$ 时, 把 $x = -2, y = -4$ 代入关系式得: $k = 5$

当 $-2 < -\frac{k}{2} < 2$, 即 $-4 < k < 4$ 时, 把 $x = -\frac{k}{2}, y = -4$ 代入关系式得:

$k = \pm 2\sqrt{6}$ (不合题意)

当 $-\frac{k}{2} \geq 2$, 即 $k \leq -4$ 时, 把 $x = 2, y = -4$ 代入关系式得: $k = -5$.

【标注】【知识点】给定范围求二次函数最值

17. 二次函数 $y = -x^2 + 2kx - 4$ 在 $-1 \leq x \leq 2$ 时, $y \leq 0$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围为 _____.

【答案】 $-\frac{5}{2} \leq k \leq 2$

【解析】根据题意: 函数图象对称轴为 $x = -\frac{2k}{-2} = k$,

①当 $k \leq -1$ 时, 此时 $y = -(-1)^2 + 2k(-1) - 4 \leq 0$ 即可, $k \geq -\frac{5}{2}$;

②当 $-1 < k < 2$ 时,

此时 $\frac{4 \times (-1) \times (-4) - (2k)^2}{4 \times (-1)} \leq 0$, 解得 $k \geq -2$ 或 $k \leq 2$,

故 $-1 < k < 2$;

③当 $k \geq 2$ 时, 此时 $y = -2^2 + 2k \cdot 2 - 4 \leq 0$ 即可, $k \leq 2$, 故 $k = 2$,

所以 k 的取值为 $-\frac{5}{2} \leq k \leq 2$,

故答案为 $-\frac{5}{2} \leq k \leq 2$.

【标注】【知识点】二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的增减性

经典再现

18. 已知二次函数 $y = (x - h)^2 + 1$ (h 为常数), 在自变量 x 的值满足 $1 \leq x \leq 3$ 的情况下, 与其对应的函数值 y 的最小值为5, 则 h 的值为 ().

A. 1或-5

B. -1或5

C. 1或-3

D. 1或3

【答案】B

【解析】 $\because$ 当 $x > h$ 时, y 随 x 的增大而增大, 当 $x < h$ 时, y 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ ①若 $h < 1 \leq x \leq 3$, $x = 1$ 时, y 取得最小值5,

可得： $(1-h)^2 + 1 = 5$ ，

解得： $h = -1$ 或 $h = 3$ （舍）；

②若 $1 \leq x \leq 3 < h$ ，当 $x = 3$ 时， y 取得最小值5，

可得： $(3-h)^2 + 1 = 5$ ，

解得： $h = 5$ 或 $h = 1$ （舍）。

③若 $1 \leq h \leq 3$ ，

$\therefore x = h$ 时， t 取得最小值1，不为5，舍去。

综上， h 的值为-1或5。

【标注】【知识点】定区间动轴函数的最值问题

四、动轴动区间

典题精练

19. 设 $a < -1$ ， $0 \leq x \leq -a-1$ ，且函数 $y = x^2 + ax$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$ ，则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $-\frac{3}{2}$

【解析】 抛物线对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{a}{2}$ ，

$\because a < -1$ ，

$\therefore -\frac{a}{2} > \frac{1}{2}$ ，

① $-a-1 \leq -\frac{a}{2}$ 即 $-2 \leq a < -1$ 时，

当 $x = -a-1$ ，函数 $y = x^2 + ax$ 有最小值，

$(-a-1)^2 + a(-a-1) = -\frac{1}{2}$ ，

解得 $a = -\frac{3}{2}$ ，

② $-a-1 > -\frac{a}{2}$ 即 $a < -2$ 时，

当 $x = -\frac{a}{2}$ ，函数 $y = x^2 + ax$ 有最小值，

$(-\frac{a}{2})^2 + a(-\frac{a}{2}) = -\frac{1}{2}$ ，

解得 $a_1 = \sqrt{2}$ ， $a_2 = -\sqrt{2}$ 均不符合题意，舍去，

综上所述， a 的值为 $-\frac{3}{2}$ 。

【标注】【知识点】动轴动区间函数的最值问题

20. 已知二次函数 $y = x^2 + bx + c$ (b, c 为常数) .

- (1) 当 $b = 2, c = -3$ 时, 求二次函数的最小值 .
- (2) 当 $c = 5$ 时, 若在函数值 $y = 1$ 的情况下, 只有一个自变量 x 的值与其对应, 求此时二次函数的解析式 .
- (3) 当 $c = b^2$ 时, 若在自变量 x 的值满足 $b \leq x \leq b + 3$ 的情况下, 与其对应的函数值 y 的最小值为 21, 求此时二次函数的解析式 .

【答案】 (1) 当 $x = -1$ 时, 二次函数取得最小值 -4 .

(2) $y = x^2 + 4x + 5$ 或 $y = x^2 - 4x + 5$.

(3) $y = x^2 + \sqrt{7}x + 7$ 或 $y = x^2 - 4x + 16$.

【解析】 (1) 当 $b = 2, c = -3$ 时, 二次函数的解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$, 即

$$y = (x + 1)^2 - 4 .$$

$\therefore$ 当 $x = -1$ 时, 二次函数取得最小值 -4 .

(2) 当 $c = 5$ 时, 二次函数的解析式为 $y = x^2 + bx + 5$.

由题意, 得方程 $x^2 + bx + 5 = 1$ 有两个相等的实数根,

有 $\Delta = b^2 - 16 = 0$, 解得 $b_1 = 4, b_2 = -4$.

$\therefore$ 此时二次函数的解析式为 $y = x^2 + 4x + 5$ 或 $y = x^2 - 4x + 5$.

(3) 当 $c = b^2$ 时, 二次函数的解析式为 $y = x^2 + bx + b^2$.

它的图象是开口向上, 对称轴为 $x = -\frac{b}{2}$ 的抛物线 .

①若 $-\frac{b}{2} < b$, 即 $b > 0$,

在自变量 x 的值满足 $b \leq x \leq b + 3$ 的情况下, 与其对应的函数值 y 随 x 的增大而增大,

故当 $x = b$ 时, $y = b^2 + b \cdot b + b^2 = 3b^2$ 为最小值 .

$\therefore 3b^2 = 21$, 解得 $b_1 = -\sqrt{7}$ (舍), $b_2 = \sqrt{7}$.

②若 $b \leq -\frac{b}{2} \leq b + 3$, 即 $-2 \leq b \leq 0$,

当 $x = -\frac{b}{2}$ 时, $y = \left(-\frac{b}{2}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) + b^2 = \frac{3}{4}b^2$ 为最小值 .

$\therefore \frac{3}{4}b^2 = 21$, 解得 $b_3 = -2\sqrt{7}$ (舍), $b_4 = 2\sqrt{7}$ (舍) .

③若 $-\frac{b}{2} > b + 3$, 即 $b < -2$,

在自变量 x 的值满足 $b \leq x \leq b + 3$ 的情况下, 与其对应的函数值 y 随 x 的增大而减小,

故当 $x = b + 3$ 时, $y = (b + 3)^2 + b(b + 3) + b^2 = 3b^2 + 9b + 9$ 为最小值 .

$\therefore 3b^2 + 9b + 9 = 21$, 即 $b^2 + 3b - 4 = 0$. 解得 $b_5 = 1$ (舍), $b_6 = -4$.

综上所述, $b = \sqrt{7}$ 或 $b = -4$.

$\therefore$ 此时二次函数的解析式为 $y = x^2 + \sqrt{7}x + 7$ 或 $y = x^2 - 4x + 16$.

【标注】【知识点】二次函数一般式

【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

【知识点】一元二次方程根的判别式

【能力】运算能力

【思想】分类讨论思想